Ecole Supérieure de Comptabilité et de Finance de Constantine

*Module : **Algèbre***

*Contrôle **Numéro 1*** *$2^{ème}$ Année (2016/ 2017)*

*Durée **01h30 ; date 16/01 /2017***

ATTENTION : *L'utilisation des calculatrices et des téléphonées portable est formellement interdite*

Questions 1 (10 points)

1. Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes linéaires suivants :

$$(a)\ \begin{cases} y-z=1 \\ z-x=1 \\ x-y=1 \end{cases}, \quad (b)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Calculer le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Soient a, b et c trois nombres réels

a) Quelle relation doivent satisfaire les paramètres a, b et c pour que le système ait au moins une solution

$$S_{abc} : \begin{cases} x+2y-3z=a \\ 2x+6y-11z=b \\ x-2y+7z=c \end{cases}$$

b) Est-ce que le système S_{abc} peut avoir une unique solution ?

Questions 2 (10 points)

1. Soit $E = \{(x,y,z,t) \in IR^4 \ / \ x+y+z=0 \text{ et } y+2z+3t=0\}$

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de IR^4

b) Donner une base de E. puis prolonger cette base en une base de IR^4.

2. a) Résoudre par la méthode du pivot de Gauss le système linéaire :

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+4t=0 \end{cases}$$

b) Les sous-espaces vectoriels $F = \{(x,y,z,t) \in IR^4 \ / \ x+y+z=0\}$ et $G = \{(x,y,z,t) \in IR^4 \ / \ x+y+4t=0\}$ sont-ils supplémentaires dans IR^4 ?

Bonne chance

Correction d'examen (Janvier 2017)

Module: Algèbre 2ème année

Exercices 1 (10 points)

(1) (a) $\begin{cases} y - z = 1 \\ z - x = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \; l_1 \longleftrightarrow l_2 \; \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \; l_3 \leftarrow -l_3 - l_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \; l_3 \leftarrow l_3 - l_2 \; \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} -x + z = 1 \\ y - z = 1 \\ 0 = -3 \end{cases}$, Alors $S' = \phi$ 2

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \; \begin{array}{l} l_2 \longleftarrow 3l_2 - l_1 \\ l_3 \longleftarrow 3l_3 - 2l_1 \end{array} \; \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 1 & 0 \end{array}\right) \; l_3 \leftarrow l_3 + l_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} 3x + z = 0 \\ 9y - z = 0 \end{cases} \Longrightarrow z = 9y$ et $x = -3y$ 2

alors $S_b' = \{(-3y, y, 9y) \,/\, y \in \mathbb{R}\}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_2 \leftarrow 2l_2 - 3l_1 \\ l_3 \leftarrow 2l_3 + l_1 . \end{matrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -7 \\ 0 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} l_3 \leftarrow l_3 + l_2$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2

alors $rg(A) = 2$

(3) $S_{abc} : \begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 2 & 6 & -11 & b \\ 1 & -2 & 7 & c \end{array}\right) \begin{matrix} l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - l_1 \end{matrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b-2a \\ 0 & -4 & 10 & c-a \end{array}\right) l_3 \leftarrow l_3 + 2l_2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & -5a+2b+c \end{array}\right)$ 2

Donc si $-5a+2b+c=0$ alors il existe au moins une solution

(b) Non. Car :

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} \underset{l_3 \leftarrow l_3 - l_1}{\overset{l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & 10 \end{vmatrix}$

$\overset{l_3 \leftarrow l_3 + 2l_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ 4

Exercice 2 (10 points)

(1) $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x + y + z = 0 \text{ et } y + 2z + 3t = 0\}$

(a) $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, y = -2z - 3t \text{ et } x = z + 3t\}$

$= \{(z + 3t, -2z - 3t, z, t) \,/\, z, t \in \mathbb{R}\}$

$= \{z(1, -2, 1, 0) + t(3, -3, 0, 1) \,/\, z, t \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}\{(1, -2, 1, 0), (3, -3, 0, 1)\}$

E est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $(1, -2, 1, 0)$, $(3, -3, 0, 1)$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ 2

(b) on a $\mathcal{F} = \{(1, -2, 1, 0), (3, -3, 0, 1)\}$ est une famille génératrice de E

Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, tq $\lambda_1(1, -2, 1, 0) + \lambda_2(3, -3, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$

alors $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\mathcal{F}$ est libre

2

d'où $\mathcal{F} = \{(1, -2, 1, 0), (3, -3, 0, 1)\}$ est une base de E

on a $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $l_2 \leftarrow l_2 - 3l_1$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

on pose $v_3 = (0, 0, 1, 0)$ et $v_4 = (0, 0, 0, -1)$

on a $\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$

donc $rg(B = \{(1, -2, 1, 0), (3, -3, 0, 1), v_3, v_4\}) = 4 = \text{card} B$

$\Longrightarrow$ B est libre ....(1)

card $B = \dim \mathbb{R}^4$ ......(2)

de (1) et (2) $B = \{(1,-2,1,0), (3,-3,0,1), (0,0,1,0), (0,0,0,-1)\}$ 2

est une base de $\mathbb{R}^4$

(2) (a) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+4t=0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad l_2 \leftarrow l_2 - l_1$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -z+4t=0 \end{cases} \Longrightarrow z=4t, \quad x=-y-4t$$

alors $S = \{(-y-4t, y, 4t, t) / y, t \in \mathbb{R}\}$ 2

(b) $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y+z=0\}$
$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y+4t=0\}$

alors $F \cap G = S \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$

$\Longrightarrow$ la somme $F+G$ n'est pas directe

d'où les sous-espaces vectoriels F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$. 2