République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours national d'Accès aux Ecoles Supérieures
Année universitaire 2017/2018

DOMAINE : SEGC

EPREUVE corrigée : Probabilité

Coefficient = 2 Durée : 1h00

<u>Exercice1</u> : (06 points)
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 2 . Sa fonction de répartition est : $F_X(x) = 1 - e^{-2x};\ x > 0$

1. Loi de Y : $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ **(0.5 pt)**

$P(Y = -1) = P(X \leq 1) = F_X(1) = 1 - e^{-2}$ **(1 pt)**

$P(Y = 1) = P(X > 1) = 1 - F_X(1) = e^{-2}$ **(1 pt)**

2. La fonction génératrice des moments :

$M_Y(t) = E(e^{ty}) = e^{-t}P(Y = -1) + e^{t}P(Y = 1) = e^{-t}(1 - e^{-2}) + e^{t}e^{-2} =$
$e^{-t} - e^{-t-2} + e^{t-2}$ **(1 pt)**

$E(Y) = M'_Y(t = 0)$ **(0.5 pt)**

$M'_Y(t) = -e^{-t} + e^{-t-2} + e^{t-2}$

Alors $E(Y) = 2e^{-2} - 1$ **(0.5 pt)**

$E(Y^2) = M''_Y(t = 0)$ **(0.5 pt)**

$M''_Y(t) = e^{-t} - e^{-t-2} + e^{t-2}$

Alors $E(Y^2) = 1$ **(0.5 pt)**

Donc $V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 1 - (2e^{-2} - 1)^2 = -4e^{-4} + 2e^{-2}$ **(0.5 pt)**

Exercice2 : **(14 Points)**

1. La fonction $f_{(X,Y)}(x,y)$ est une densité, i.e $f_{(X,Y)}(x,y) > 0$ et $\int_{IR^2} f(x,y)dxdy = 1$ **(1 pt)**

$$1 = \int_0^1\int_0^1 (\alpha xy + \beta y^2)dxdy = \int_0^1 \left(\alpha \frac{x^2}{2} y + \beta x y^2\right)\Big|_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\alpha}{2} y + \beta y^2\right)dy = \left(\frac{\alpha y^2}{4} + \frac{\beta y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{3} \quad \textbf{(1 pt)}$$

Donc en vérifiant que : $3\alpha + 4\beta = 12$ (1) **(0.5 pt)**

2. La densité marginale $f_X(x)$ de X est :

$$f_X(x) = \int_0^1 (\alpha xy + \beta y^2)dy = \left(\frac{\alpha x y^2}{2} + \beta \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{\alpha x}{2} + \frac{\beta}{3},\ 0 < x < 1 \qquad \textbf{(1,5 pt)}$$

3. $E(X) = \int_{IR} x f_X(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta x}{3}\right)dx = \left(\frac{\alpha x^3}{6} + \frac{\beta x^2}{6}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\alpha}{6} + \frac{\beta}{6} = \frac{7}{12}$ (2) **(1 pt)**

   Des équations (1) & (2), on déduit que : $\alpha = 2,\ \beta = \frac{3}{2}$ **(1 pt)**

4. On trouver la densité conditionnelle $f_{Y/X=x}(y)$ à l'aide de la relation

$$f_{Y/X=x}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

   Ainsi

$$f_{Y/X=x}(y) = \frac{2xy + \frac{3}{2}y^2}{x + \frac{1}{2}} = \frac{4xy + 3y^2}{2x+1},\ 0 < y < 1 \qquad \textbf{(1 pt)}$$

   La densité marginale $f_Y(y)$ de Y est :

$$f_Y(y) = \int_0^1 \left(2xy + \frac{3}{2}y^2\right)dx = \left(x^2 y + \frac{3}{2}xy^2\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = y + \frac{3}{2}y^2,\ 0 < y < 1 \qquad \textbf{(1,5 pt)}$$

   Les variables aléatoires X *et* Y sont dépendantes : $f_{(X,Y)}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ **(1 pt)**

5. Calculons l'espérance conditionnelle $E(Y/X=x)$:

$$E(Y/X=x) = \int_0^1 y f_{Y/X=x}(y)dy$$

$$= \int_0^1 y \frac{4xy + 3y^2}{2x+1} dy = \frac{1}{2x+1}\left(\frac{4}{3}xy^3 + \frac{3}{4}y^4\right)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{16x+9}{12(2x+1)} \qquad \textbf{(1 pt)}$$

6. $Z = E(Y/X) = \frac{16X+9}{12(2X+1)}$. **(1 ,5 pt)**

   L'espérance de Z est

$$E(Z) = E(E(Y/X)) = E(Y) = \int_0^1 y\left(y + \frac{3}{2}y^2\right)dy = \left(\frac{y^3}{3} + \frac{3}{8}y^4\right)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{17}{24} \quad \textbf{(1.5 pt)}$$